Сложени системи и корелације; Шмитова канонска форма

– Појам сложеног система

Парадигма: дводелни систем

А) Водоников атом

простор стања – $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(e)} \otimes \mathcal{H}^{(p)}$

Хамилтонијан: $\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_p + \hat{V}_{coul} \equiv \hat{H}_e \otimes \hat{I}_p + \hat{I}_e \otimes \hat{H}_p + \hat{V}_{coul}$

Б) орбитални и спински степени слободе

простор стања – $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(o)} \otimes \mathcal{H}^{(s)}$

Хамилтонијан: $\hat{H} = \hat{H}_o \otimes \hat{I}_s + \hat{I}_o \otimes \hat{H}_s + \hat{H}_{so}$

(нпр L-S спрезање или индуковано спољашњим пољем)

– Појам корелација (квантних)

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i c_i |i\rangle_A |i\rangle_B \quad , \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$$

чисто, сплетено стање

– Статистички оператор

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i |c_i|^2 \, |i\rangle_A\langle i| \otimes |i\rangle_B\langle i|$$

- Парцијални траг

↓

операција узимања трага у само једном фактор простору

$$\hat{A} \in \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$$

$$tr_B \hat{A} = \sum_i {}_B\langle x_i | \hat{A} | x_i \rangle_B$$

- Парцијални скаларни производ: елемент из фактор простора скаларно множи елемент из композитног простора

$$ {}_A\langle \xi | \psi \rangle_{AB} = \sum_i c_i \, {}_A\langle \xi | i \rangle_A \, |i\rangle_B$$

$$= \sum_i c_i d_i \, |i\rangle_B \in \mathcal{H}^{(B)}$$

- Редуковани статистички оператор

$$\hat{\rho}_A = tr_B \hat{\rho}_{AB} \quad , \quad \hat{\rho}_B = tr_A \hat{\rho}_{AB}$$

- ШКФ: појам и алгоритам

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i p_i \, |i\rangle_A |i\rangle_B$$; Schmidt decompositi

↓

Шмитови коефицијенти

$i = \overline{1,n}$; $n = \min \dim (\mathcal{H}^{(A)}, \mathcal{H}^{(B)})$

$p_i = 1$, k_i некорелисано стање

Алгоритам

1. Нађе се $\hat{\rho}_A$ (или $\hat{\rho}_B$)
2. Реши се своj. проблем $\hat{\rho}_A$ → λ_i, $|i\rangle_A$

↳ Шмитов базис за први подсистем

3. $\sqrt{\lambda_i} = p_i$

$$|i\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \; {}_A\langle i|\Psi\rangle_{AB}$$

– ОЧЕКИВАНЕ ВРЕДНОСТИ

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)} \quad , \quad \hat{\rho}_{AB}$$

$$\hat{\Omega} \in \mathcal{H}^{(A)} \qquad\qquad \langle \hat{\Omega} \rangle = \mathrm{tr}_A \, \hat{\Omega} \hat{\rho}_A$$

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega} \otimes \hat{I}_B$$

1 Посматра се бипартитни систем 1+2. Хамилтонијан којим је описана динамика је $\hat{H} = \hat{H}_1 \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{H}_2 + \hat{H}_{INT}$, где је $\hat{H}_{INT}$ интеракција подсистема 1 и 2. Ако је $\hat{H}_{INT} = \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2$, показати да унитарна еволуција $\hat{U} |\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2$ има за последицу сплетено стање система.

$\hat{H}$ не зависи од времена

$|\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2 \rightarrow$ почетно некорелисано стање

$$\hat{U} = e^{-i\alpha \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2}$$

Нагласити да се занемарују сопствени хамилтонијани

Нека су $|\psi_m\rangle_1$ својствена стања опсервабле $\hat{A}_1$ (пошто је $\hat{U}$ унитарно, $\hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2$ је ермитско односно, $\hat{A}_1$ и $\hat{B}_2$ су ермитски, односно нормални оператори $\rightarrow$ дијагонализабилност оператора)

$$|\phi\rangle_1 = \sum_m c_m |\psi_m\rangle_1$$

$$e^{-i\alpha \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2} \sum_m c_m |\psi_m\rangle_1 |\chi\rangle_2$$

$$e^{-i\hat{A}} = e^{-i\sum_n a_n \hat{P}_n} = \sum_n e^{-ia_n} \hat{P}_n$$

$$= \sum_k \hat{P}_{1k} \otimes e^{-i\alpha a_k \hat{B}_2} \sum_m c_m |\psi_m\rangle_1 \, |\chi\rangle_2$$

$$\left[\hat{P}_{1k} |\psi_m\rangle_1 = \delta_{km} |\psi_m\rangle_1 \right]$$

$$= \sum_k \sum_m \delta_{km} c_m \, e^{-i\alpha a_k \hat{B}_2} |\psi_m\rangle_1 \, |\chi\rangle_2$$

$$= \sum_m c_m \, e^{-i\alpha a_m \hat{B}_2} |\psi_m\rangle_1 \, |\chi\rangle_2$$

$$= \sum_m c_m |\psi_m\rangle_1 \, e^{-i\alpha a_m \hat{B}_2} |\chi\rangle_2$$

$$= \sum_m c_m |\psi_m\rangle_1 \, |\chi_m(\alpha)\rangle_2$$

СПЛЕТЕНОСТ: ПОСЛЕДИЦА УНИВЕРЗАЛНОГ ВАЖЕЊА КВАНТНЕ МЕХАНИКЕ

2. Задато је стање двочестичног система, при чему су простори стања честица дводимензионални:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Наћи одговарајућу ЈКФ овог стања

Честица A, базис $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$

Честица B, базис $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$

Базис за укупни простор:

$$\{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B,\ |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B,\ |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B,\ |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\}$$

Развије се стање по овом базису

$$|\psi_{AB}\rangle = a\,|0\rangle_A|0\rangle_B + b\,|0\rangle_A|1\rangle_B + c\,|1\rangle_A|0\rangle_B + d\,|1\rangle_A|1\rangle_B$$

Када се упореди са задатим стањем

$$\left(|0\rangle - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ |1\rangle - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$ важи се да је

$a = 0$
$b = 1/2$
$c = 1/2$
$d = 0$

$$\Rightarrow\ |\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|1\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A|0\rangle_B$$

Први редуковани статистички оператор за подсистем A

$$\hat{\rho}_A \doteq \mathrm{tr}_B\, |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{i=0,1} {}_B\langle i|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|i\rangle_B$$

$$= {}_B\langle 0|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|1\rangle_B$$

$$= \frac{1}{2}|0\rangle_A\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle_A\langle 1|$$

Други редуковани статистички оператор, за подсистем B (има исте св. вредности)

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{2}|\varphi\rangle_B\langle\varphi| + \frac{1}{2}|\chi\rangle_B\langle\chi| \quad \Rightarrow$$

$$|\varphi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\,{}_A\langle 0|\Psi_{AB}\rangle = \ldots = |1\rangle_B$$

$$|\chi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\,{}_A\langle 1|\Psi_{AB}\rangle = \ldots = |0\rangle_B \quad \Rightarrow$$

$$\hat{\rho}_B = \frac{1}{2}|1\rangle_B\langle 1| + \frac{1}{2}|0\rangle_B\langle 0|$$

ШКФ:

$$|\Psi_{12}\rangle = \sqrt{r_1}\,|0\rangle_A|1\rangle_B + \sqrt{r_2}\,|1\rangle_A|0\rangle_B$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|1\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A|0\rangle_B$$

13 За електрон у водониковом атому задато је стање

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\,\psi_{100}(\vec{r}) \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_{200}(\vec{r}) \end{bmatrix}$$

Наћи стање електрона у спинском фактор простору.

Горње стање је спинор.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\psi_{100}(\vec{r})\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_{200}(\vec{r})\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

односно

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|100\rangle \otimes |+\rangle_z + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|200\rangle \otimes |-\rangle_z$$

$$\hat{\rho}_{сп} = \mathrm{tr}_{орб}\,|\psi\rangle\langle\psi|$$

$$= \frac{1}{3}\,|+\rangle_z\langle +| + \frac{2}{3}\,|-\rangle_z\langle -|$$

Како гласи стање електрона у орбиталном фактор простору?

5. Доказати да је следећи базис (тзв. Белов базис) један ОНБ у 4Д простору тензорског производа два фактор простора који одговарају спину $\frac{1}{2}$:

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 |+\rangle_2 \pm |-\rangle_1 |-\rangle_2\right)$$

$$|\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 \pm |-\rangle_1 |+\rangle_2\right)$$

Под претпоставком да су горе дата подсистемска стања својствена стања z-пројекције оба спина, матрично репрезентовати $|\psi^+\rangle$ ~~ова~~ стање у:

а) $\hat{S}_{1x} \otimes \hat{S}_{2x}$ репрезентацији,

б) $\hat{S}_{1y} \otimes \hat{S}_{2x}$ репрезентацији. (испит)

Први део задатка за вежбу

Треба показати

$$\langle\psi^+|\psi^+\rangle = \frac{1}{2}\left({}_1\langle+|\,{}_2\langle+| + {}_1\langle-|\,{}_2\langle-|\right)\left(|+\rangle_1 |+\rangle_2 + |-\rangle_1 |-\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big({}_1\langle+|+\rangle_1\, {}_2\langle+|+\rangle_2 + \underbrace{\cancel{{}_1\langle+|-\rangle_1\, {}_2\langle+|-\rangle_2}}_{0} + \underbrace{\cancel{{}_1\langle-|+\rangle_1\, {}_2\langle-|+\rangle_2}}_{0} + {}_1\langle-|-\rangle_1\, {}_2\langle-|-\rangle_2\Big) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\langle\psi^+|\psi^-\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle\psi^+|\phi^-\rangle = 0$$

$$\langle\psi^+|\phi^+\rangle = 0 \quad \text{и тд}$$

Стање $|\Psi^+\rangle$ у $\hat{S}_{1x} \otimes \hat{S}_{2x}$ репр.

Стање је већ задато у $\hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2z}$ репрезентацији

Како изгледа $\hat{S}_z$ у $\hat{S}_x$ репрезентацији?

$\hat{S}_z$

$$\hat{S}_z \quad \hat{S}_x \quad \hat{S}_y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Циклично

$\hat{S}_x$

$$\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$$

Онда су својствена стања за

$$\hat{S}_z \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |+\rangle_z^x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = |-\rangle_z^x \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} |+\rangle_z^x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + i|-\rangle_z\right) \\ \text{а слично и} \\ |-\rangle_z^x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z - i|-\rangle_z\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Одатле:

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z^x + |-\rangle_z^x\right)$$

$$|-\rangle_z = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle_z^x - |+\rangle_z^x \right)$$

ОНДА је

$$|\psi^+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\left(|+\rangle_{1z}^x + |-\rangle_{1z}^x \right)\left(|+\rangle_{2z}^x + |-\rangle_{2z}^x \right) + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left(|-\rangle_{1z}^x - |+\rangle_{1z}^x \right)\left(|-\rangle_{2z}^x - |+\rangle_{2z}^x \right) \right)$$

$$|\psi^+\rangle_x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cancel{|+\rangle_{1z}^x|+\rangle_{2z}^x} + \underbrace{|+\rangle_{1z}^x|-\rangle_{2z}^x} + \underbrace{|-\rangle_{1z}^x|+\rangle_{2z}^x} + \right.$$

$$\cancel{|-\rangle_{1z}^x|-\rangle_{2z}^x} - \cancel{|-\rangle_{1z}^x|-\rangle_{2z}^x} + \underbrace{|-\rangle_{1z}^x|+\rangle_{2z}^x} + \underbrace{|+\rangle_{1z}^x|-\rangle_{2z}^x}$$

$$\left. - \cancel{|+\rangle_{1z}^x|+\rangle_{2z}^x} \right)$$

$$|\psi^+\rangle_x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\,|+\rangle_{1z}^x|-\rangle_{2z}^x + 2|-\rangle_{1z}^x|+\rangle_{2z}^x \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1z}^x|-\rangle_{2z}^x + |-\rangle_{1z}^x|+\rangle_{2z}^x \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ i\\ 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Стање $|\Psi^+\rangle$ у $S_{1y} \otimes S_{2x}$ репрезентацији

Како изгледа $\hat{S}_z$ у $\hat{S}_y$ репрезентацији?

$$\hat{S}_z^x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |+\rangle_z^x \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = |-\rangle_z^x$$

$$\hat{S}_z^y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|+\rangle_z^y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |-\rangle_z^y$$

Већ је било

$$|+\rangle_z^z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z^x + |-\rangle_z^x \right)$$

$$|-\rangle_z^z = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(|-\rangle_z^x - |+\rangle_z^x \right)$$

А одавде се лако добија

$$|+\rangle_z^z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z^y + |-\rangle_z^y \right)$$

$$|-\rangle_z^z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z^y - |-\rangle_z^y \right)$$

ОНДА ЈЕ

$$|\psi^+\rangle_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\left(|+\rangle_{1z}^{x} + |-\rangle_{1z}^{x}\right)\left(|+\rangle_{2z}^{y} + |-\rangle_{2z}^{y}\right) + \frac{i}{2}\left(|+\rangle_{1z}^{y} - |-\rangle_{1z}^{y}\right)\left(|-\rangle_{z}^{x} - |+\rangle_{z}^{x}\right)\right)$$

$$|\psi^+\rangle_{xy} \to \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\right]\otimes\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right] + \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right]\otimes\left[\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\ -2i\end{pmatrix}\right\} =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -4i\end{pmatrix}\right\} =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 0\\ 4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Остало за домаћи

Примедба:

А простијем примеру

$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_{1z}|\downarrow\rangle_{2z}$ ← задато (ово је $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z$ репр)

Представити ово стање у $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$ репр, значи наћи како изгледа $\hat{\sigma}_z$ у $\hat{\sigma}_x$ репр. и онда наћи одговарајуће св. векторе

5.) У стањима из претходног задатка израчунати стандардно одступање опсервабле:

а) $\hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2$

б) $\hat{I}_1 \otimes \hat{S}_{2y}$ } исто

в) $\hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2z}$ и то! прво без, а онда у $\hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2z}$ репрезентацији.

а) без репрезентације

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)$$

$$\hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2 = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle_1\langle -| + |-\rangle_1\langle +|\right) \otimes \hat{I}_2$$

Стање $|\Psi^+\rangle$

$$\langle \hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2 \rangle = \langle \Psi^+ | \hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2 | \Psi^+ \rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left({}_1\langle +|\,{}_2\langle +| + {}_1\langle -|\,{}_2\langle -|\right)\left(\frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle_1\langle -| + |-\rangle_1\langle +|\right) \otimes \hat{I}_2\right)$$

$$\left(|+\rangle_1|+\rangle_2 + |-\rangle_1|-\rangle_2\right)$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left({}_1\langle -|\,{}_2\langle +| + {}_1\langle +|\,{}_2\langle -|\right)\left(|+\rangle_1|+\rangle_2 + |-\rangle_1|-\rangle_2\right)$$

$$= 0$$

$\cdot \langle \hat{S}_{1x}^2 \otimes \hat{I}_2 \rangle = ?$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| \right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| \right)\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| \right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| \right) = \frac{\hbar^2}{4}\hat{I}$$

$$\langle \hat{S}_{1x}^2 \otimes \hat{I}_2 \rangle = \langle \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \rangle = 1\frac{\hbar^2}{4}, \ \forall |\psi\rangle$$

$$\Delta\left(\hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2 \right) = \sqrt{\langle \hat{S}_{1x}^2 \otimes \hat{I}_2 \rangle - \langle \hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2 \rangle^2}$$

$$= 1\frac{\hbar}{2}$$

ii) МАТРИЧНО

$$\hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2 \rightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\psi^+\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\langle \hat{S}_{1x} \otimes \hat{I}_2 \rangle \rightarrow \frac{\hbar}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$\langle \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \rangle \rightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 1$$

Дакле, као и без репрезентације.

6. Штерн - Герлаховом експерименту стање после магнета је, под претпоставком важења Ш.-Ј. за атом као целину, облика:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|I\rangle_0 |+\rangle_z + |II\rangle_0 |-\rangle_z\right)$$

где се индекс "0" у стању тиче путање центра масе атома. Наћи подсистемске матрице густине и израчунати: вероватноћу да се атом нађе на путањи I, као и стандардно одступање x - пројекције спина атома.

Домаћи

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2}\left(|I\rangle_0\langle I| + |II\rangle_0\langle II|\right) = \frac{1}{2}\hat{I}_0$$

$$\hat{\rho}_s = \frac{1}{2}\left(|+\rangle_z\langle +| + |-\rangle_z\langle -|\right) = \frac{1}{2}\hat{I}_s$$

Вероватноћа за путању I

$$\hat{X}_{cm} = x_{cm}^{I}|I\rangle_0\langle I| + x_{cm}^{II}|II\rangle_0\langle II|$$

$$W\left(|\Psi\rangle_{0+s}, \hat{X}_{cm}, x_{cm}^{i=I,II}\right) =$$

$$W\left(\hat{\rho}_{0+s}, \hat{X}_{cm}, x_{cm}^{i=I,II}\right)$$

$\hat{\rho}_{0+s}$ и $|\Psi\rangle_{0+s}$ се не могу разликовати на подсистемском нивоу.

$$\hat{\rho}_{O+S} = \frac{1}{2} |I\rangle_O \langle I| \otimes |+\rangle_z \langle +| + \frac{1}{2} |II\rangle_O \langle II| \otimes |-\rangle_z \langle -|$$

$$W(f_{0\ldots}) = tr\left(\hat{\rho}_{O+S}\ \underbrace{\hat{P}_O^{I} \otimes \hat{I}_S}\right) =$$

$$= tr\left(\left[|I\rangle_O \langle I| \otimes |+\rangle_z \langle +| + |I\rangle_O \langle I| \otimes |-\rangle_z \langle -|\right] \hat{\rho}_{O+S}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Стандардно одступање опсервабле $\hat{S}_x$

$$\Delta \hat{S}_x = \sqrt{\langle \hat{S}_x^2 \rangle - \langle \hat{S}_x \rangle^2}$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle_z \langle -| + |-\rangle_z \langle +|\right)$$

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\langle \hat{S}_x \rangle = tr(\hat{\rho}_S \hat{S}_x) = \frac{1}{2} tr(\hat{I}_S \hat{S}_x) = \frac{1}{2} tr\, \hat{S}_x = 0$$

$$\Delta \hat{S}_x = \sqrt{1 - 0} = 1$$

9 Дата су Белова стања:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|+\rangle_2 + |-\rangle_1|-\rangle_2\right)$$

и $$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2\right)$$

Како гласе редуковани статистички оператори за подсистем 1 и 2, редом? А матрице густине?

— ∘ —

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 |+\rangle_2 + |-\rangle_1 |-\rangle_2\right)$$

$$\hat{\rho} = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| = \frac{1}{2}\Big(|+\rangle_1\langle+| \otimes |+\rangle_2\langle+| + |+\rangle_1\langle-| \otimes |+\rangle\langle-| +$$
$$|-\rangle_1\langle+| \otimes |-\rangle_2\langle+| + |-\rangle_1\langle-| \otimes |-\rangle_2\langle-|\Big)$$

Одавде

$$\hat{\rho}_1 = tr_2\,\hat{\rho} = {}_2\langle+|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|+\rangle_2 + {}_2\langle-|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|-\rangle_2$$

$$= \frac{1}{2}\left(|+\rangle_1\langle+| + |-\rangle_1\langle-|\right)$$

и

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}\left(|-\rangle_2\langle-| + |+\rangle_2\langle+|\right)$$

Друго стање за домаћи.

Домаћи: Задато је стање

$$|\Psi_{AB}\rangle = x|00\rangle + y|11\rangle + z|01\rangle + t|10\rangle.$$

Како гласи $\hat{\rho}_A$? Израчунати $\langle\hat{\sigma}_{xA}\rangle$ у овом стању.

11. За пар електрона у атому хелијума задато је стање:

$$\langle\vec r|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{211}(\vec r)\,\psi_{21-1}(\vec r) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{21-1}(\vec r)\,\psi_{211}(\vec r)$$

Ако је вероватноћа мерења z-пројекције укупног спина пара електрона за вредност 0 једнака јединици, написати спинско стање овога система. Шта се може рећи о спинском стању једног електрона?

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_{орб}\,|\psi\rangle_{сп}$$ — нормирано стање

$|\psi\rangle$: такође антисиметрично

$|\psi\rangle_{орб}$: симетрично

$|\psi\rangle_{сп}$: мора бити антисиметрично

$$W(\hat S_z, |\psi\rangle, 0) = 1 \Rightarrow \boxed{S=0,\ m_s=0}$$: укупни спин

$$W(\hat S_z, |\psi\rangle, 0) = \langle\psi|\,\hat P_{сп}\otimes\hat I_{орб}\,|\psi\rangle$$

$$= {}_{сп}\langle\psi|\hat P_{сп}|\psi\rangle_{сп}\;{}_{орб}\langle\psi|\hat I_{орб}|\psi\rangle_{орб}$$

$$= {}_{сп}\langle\psi|\hat P_{сп}|\psi\rangle_{сп}$$

$$= {}_{сп}\langle\psi|00\rangle\langle 00|\psi\rangle_{сп} = 1 \Rightarrow |\psi\rangle_{сп} = |00\rangle$$

Теорија општег ангуларног момента

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2\right)$$

На вежбама ставити $|\pm\rangle$ уместо $|\downarrow\uparrow\rangle$

$$\hat{\rho}_1 = tr_2\, |00\rangle_{сп}\langle 00|$$
$$= \frac{1}{2}|\uparrow\rangle_1\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle_1\langle\downarrow|$$

Слично томе и $\hat{\rho}_2$ (за домаћи)

Домаћи 1: Како гласе матричне репрезентације стања ($\hat{S}_{1z} \otimes \hat{S}_{2z}$ репрезентација)

$$\hat{\rho}_{1+2} = |00\rangle_{1+2}\langle 00| ,$$

$\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$?

Домаћи 2:

Да ли је стање

$$\rho = \frac{1}{3}\psi_{100}(\vec{r}\,')\psi^*_{100}(\vec{r}) + \frac{2}{3}\psi_{200}(\vec{r})\psi^*_{200}(\vec{r})$$

чисто или мешано стање?

Одговор: мешано стање (користити $\hat{\rho}^2 = \rho$)

9. За електрон у водониковом атому задато је стање у $\hat{S}_z$ репрезентацији:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\psi_{100}(\vec{r}) + \frac{1}{2}\,\psi_{211}(\vec{r}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\,\psi_{200}(\vec{r}) + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi_{21-1}(\vec{r}) \end{bmatrix}.$$

Превести ово стање у ШКФ. Израчунати дисперзију y-пројекције спина електрона.

— o —

$$|\psi\rangle_{ots} = \frac{1}{2}\,|100\rangle_0 \otimes |+\rangle_z + \frac{1}{2}\,|211\rangle_0 \otimes |+\rangle_z +$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,|200\rangle_0 \otimes |-\rangle_z + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|21-1\rangle \otimes |-\rangle_z$$

$|nlm\rangle_0$ — базис за траг по орбиталним степенима слободе

Како се на подсистемском нивоу $|\psi\rangle_{ots}\langle\psi|$ не може се разликовати од $\hat{\rho}_{ots}$, згодно је искористити математички еквивалентни статистички оператор

$$\hat{\rho}_{ots} = \frac{1}{4}\,|100\rangle_0\langle 100| \otimes |+\rangle_z\langle +| + \frac{1}{4}\,|211\rangle_0\langle 211| \otimes |+\rangle_z\langle +|$$

$$+ \frac{1}{6}\,|200\rangle_0\langle 200| \otimes |-\rangle_z\langle -| + \frac{1}{3}\,|21-1\rangle_0\langle 21-1| \otimes |-\rangle_z\langle -|$$

Редуковани статистички оператор

$$\hat{\rho}_s = tr_o \hat{\rho}_{s+o} = \sum_{nlm} {}_o\langle nlm | \hat{\rho}_{s+o} | nlm \rangle_o$$

$$= \frac{1}{2} |+\rangle_z\langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle_z\langle -| = \frac{1}{2} \hat{I}_s$$

$$|+\rangle_o = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \, {}_z\langle +|\psi\rangle_{o+s}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|100\rangle_o + |211\rangle_o \right)$$

$$|-\rangle_o = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \, {}_z\langle -|\psi\rangle_{o+s}$$

$$|-\rangle_o = \sqrt{\frac{1}{3}} |200\rangle_o + \sqrt{\frac{2}{3}} |21\,{-1}\rangle_o$$

$$|\psi\rangle_{o+s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|100\rangle_o + |211\rangle_o \right) \otimes |+\rangle_z +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |200\rangle_o + \sqrt{\frac{2}{3}} |21\,{-1}\rangle_o \right) \otimes |-\rangle_z$$

$$|\psi\rangle_{o+s} = \frac{1}{2} \left(|100\rangle_o + |211\rangle_o \right) \otimes |+\rangle_z +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}} |200\rangle_o \otimes |-\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{3}} |21\,{-1}\rangle_o \otimes |-\rangle_z$$

$$\Delta \hat{S}_y = ?$$

$$\Delta \hat{S}_y = \sqrt{\langle \hat{S}_y^2 \rangle - \langle \hat{S}_y \rangle^2}$$

$$\langle \hat{S}_y^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{S}_y^2 | \Psi \rangle$$

$$\hat{S}_y^2 = \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow \langle \hat{S}_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle = tr \left(\hat{S}_y \hat{\rho}_s \right) = \frac{1}{2} tr \left(\hat{S}_y \hat{I} \right) = \frac{1}{2} tr \hat{S}_y = 0$$

$$\boxed{\Delta \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}}$$

10. Задат је пар фотона. За први фотон се зна да је тотално неполаризован, тј. да су све вредности свих пројекција спина фотона (тј. поларизације фотона) једнако вероватне. Написати стање укупног система ако се зна да је стање првог фотона мешавина прве врсте, и да је укупни спин једнак нули.

Дакле, укупно стање

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$$

$$\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{S}_{2z}$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}\hat{I}_1 \, , \qquad \left.\begin{array}{l} \langle \hat{S}_z \rangle = \langle \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \rangle = 0 \\ \langle \hat{S}_{1z} \rangle = 0 \end{array}\right\} \langle \hat{S}_{2z} \rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_{2z} \rangle = 0 \iff \mathrm{tr}_2\, \hat{\rho}_2 \hat{S}_{2z} = 0$$

Могућа стања за други подсистем

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{2z} \pm |1\rangle_{2z}\right)$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}\hat{I}$$

Провера

Нпр за

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{2z} + |1\rangle_{2z}\right), \quad \hat{S}_{2z} = \frac{\hbar}{2}\left(|0\rangle_2\langle 0| - |1\rangle_2\langle 1|\right)$$

$$\hat{\rho}_2 = |\psi\rangle_2\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_2\langle 0| + |0\rangle_2\langle 1| + |1\rangle_2\langle 0| + |1\rangle_2\langle 1|\right)$$

$$\hat{\rho}_2\hat{S}_{2z} = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_2\langle 0| + |0\rangle_2\langle 1| - |1\rangle_2\langle 0| - |1\rangle_2\langle 1|\right)$$

$$tr_2\,\hat{\rho}_2\hat{S}_{2z} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

Слично и за варијанту $|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{2z} - |1\rangle_{2z}\right)$

За стање $\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}\hat{I}$

$$tr_2\,\hat{\rho}_2\hat{S}_{2z} = \frac{1}{2}\hat{I}\,\cancel{tr\,\hat{S}_{2z}}^{\,0} = 0$$

Варијација на тему: да ли је укупни спин једнак 1?

Онда би стање за други подсистем било

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{2z} \pm i|1\rangle_{2z}\right),$$

а што су својствена стања $\hat{S}_{2y}$ опсервабле.

11. Задато је стање дводелног система

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B \right).$$

Како гласе редуковани статистички оператори и одговарајуће матрице за подсистеме А и В?
Показати експлицитно да важи:

$$|\psi\rangle_{AB}\langle\psi| \neq \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B .$$

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B \right)$$

$$|\psi\rangle_{AB}\langle\psi| = \frac{1}{3} \left(|0\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B \right)$$

$$\left({}_A\langle 0| \, {}_B\langle 0| + {}_A\langle 0| \, {}_B\langle 1| + {}_A\langle 1| \, {}_B\langle 1| \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \Big(|0\rangle_A\langle 0| \otimes |0\rangle_B\langle 0| + |0\rangle_A\langle 0| \otimes |0\rangle_B\langle 1| +$$

$$|0\rangle_A\langle 1| \otimes |0\rangle_B\langle 1| + |0\rangle_A\langle 0| \otimes |1\rangle_B\langle 0| +$$

$$|0\rangle_A\langle 0| \otimes |1\rangle_B\langle 1| + |0\rangle_A\langle 1| \otimes |1\rangle_B\langle 1| +$$

$$|1\rangle_A\langle 0| \otimes |1\rangle_B\langle 0| + |1\rangle_A\langle 0| \otimes |1\rangle_B\langle 1| +$$

$$+ |1\rangle_A\langle 1| \otimes |1\rangle_B\langle 1| \Big)$$

$$\hat{\rho}_A = tr_B |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| = \sum_{i=\{0,1\}_B} {}_B\langle i|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|i\rangle_B$$

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{3}\left(|0\rangle_A\langle 0| + |0\rangle_A\langle 0| + |0\rangle_A\langle 1| + |1\rangle_A\langle 0| + |1\rangle_A\langle 1|\right)$$

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{3}\left(2|0\rangle_A\langle 0| + |0\rangle_A\langle 1| + |1\rangle_A\langle 0| + |1\rangle_A\langle 1|\right)$$

МАТРИЦА

$$\rho_A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}_B = tr_A |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| = \frac{1}{3}\Big(|0\rangle_B\langle 0| + |0\rangle_B\langle 1| + |1\rangle_B\langle 0|$$

$$+ |1\rangle_B\langle 1| + |1\rangle_B\langle 1|\Big)$$

$$\rho_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Лако се провера да важи

$$|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| \neq \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$$

14. Доказати ортогоналност

$$\langle \varphi_k | \varphi_{k'} \rangle = 0, \quad k \neq k'$$

и

$$\langle \varphi_k | \varphi_k \rangle \neq 1, \ \forall k$$

где је $|\varphi_k\rangle \equiv |\varphi_k\rangle_2 = {}_1\langle k | \psi \rangle$, $|\psi\rangle = \sum_{k,m} c_{km} |k\rangle_1 |m\rangle_2$

а $|k\rangle_1$ је својствени вектор подсистемског оператора $\hat{S}_1$.

$$|\varphi_{k'}\rangle = {}_1\langle k' | \psi \rangle$$

$$= {}_1\langle k' | \sum_{k,m} c_{k'm} |k\rangle_1 |m\rangle_2$$

$$= \sum_{k,m} {}_1\langle k' | k \rangle_1 \, c_{k'm} |m\rangle_2$$

$$= \sum_{k,m} \delta_{kk'} c_{k'm} |m\rangle_2$$

$$= \sum_m c_{k'm} |m\rangle_2$$

Дакле,

$$|\varphi_{k'}\rangle = \sum_m c_{k'm} |m\rangle_2$$

$$\boxed{\text{По деф} \quad c_{k'm} = {}_1\langle k' | \, {}_2\langle m | \psi \rangle}$$

Онда,

$$\langle \varphi_{k'} | \varphi_k \rangle = \sum_m C^*_{k'm} C_{km} \; {}_2\langle m | \cancel{m} \rangle_2^{\,1} \qquad (*)$$

$$= \sum_m \langle \psi | k' \rangle_1 |m\rangle_2 \; {}_1\langle k | \; {}_2\langle m | \psi \rangle$$

$$= {}_1\langle k | \psi \rangle \langle \psi | k' \rangle_1$$

$$= {}_1\langle k | \psi \rangle \langle \psi | \sum_k |k\rangle_1 \cancel{\langle k | k' \rangle_1}^{\,0} = 0$$

Из $(*)$, за $k = k'$ следи

$$\langle \varphi_k | \varphi_k \rangle = \sum_m C^*_{km} C_{km} = \sum_m |C_{km}|^2 \neq 1$$

јер $\sum_{k,m} |C_{km}|^2 = 1$ $\boxtimes$

Погледати ипак ~~Херберта~~ : доказ ШКФ

15. Доказати нејединозначност Шмитове форме (спински систем)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2\right)$$

за возитив (или негатив)

Помоћу:

а) непосредног расписа стања у различитим базисима

б) помоћу дегенерације подсистемских статистичких оператора

а) Подразумева се

$$\hat{\sigma}_z |0\rangle_i = |0\rangle_i, \quad \hat{\sigma}_z |1\rangle_i = -|1\rangle_i, \quad i=\overline{1,2}$$

Други базис

$$\left.\begin{aligned} |0\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_x + |1\rangle_x) \\ |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_x - |1\rangle_x) \end{aligned}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\left(|0\rangle_{x1} + |1\rangle_{x1}\right)\left(|0\rangle_{x2} - |1\rangle_{x2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(|0\rangle_{x1} - |1\rangle_{x1}\right)\left(|0\rangle_{x2} + |1\rangle_{x2}\right)\right]$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\,|0\rangle_{x_1}|0\rangle_{x_2} \cancel{- |0\rangle_{x_1}|1\rangle_{x_2}} \cancel{+ |1\rangle_{x_1}|0\rangle_{x_2}} - |1\rangle_{x_1}|1\rangle_{x_2}$$

$$+ |0\rangle_{x_1}|0\rangle_{x_2} \cancel{+ |0\rangle_{x_1}|1\rangle_{x_2}} \cancel{- |1\rangle_{x_1}|0\rangle_{x_2}} - |1\rangle_{x_1}|1\rangle_{x_2}\,\Big]$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\,2|0\rangle_{x_1}|0\rangle_{x_2} - 2|1\rangle_{x_1}|1\rangle_{x_2}\,\Big]$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\,|0\rangle_{x_1}|0\rangle_{x_2} - |1\rangle_{x_1}|1\rangle_{x_2}\,\Big]$$

б) Дегенерација подсистемског статистичког оператора.

ШКФ стања је једнозначна акко су $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ комплетне опсервабле.

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}|0\rangle_1\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle_1\langle 1|$$

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ШКФ}$$

неједнозначна

Дегенерисана својствена вредност

За вежбу

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2\right)$$

14. Средње вредности опсервабли подсистема 1, односно 2 се рачунају по следећим обрасцима

$$\langle \hat{A}_1 \rangle = tr_1(\hat{A}_1 \hat{\rho}_1) \equiv tr_{12}(\hat{A}_1 \otimes \hat{I}_2 \, \hat{\rho}_{12})$$

$$\langle \hat{B}_2 \rangle = tr_2(\hat{B}_2 \hat{\rho}_2)$$

Доказати ______ о ______

За $\hat{A}_1$ опсервабалу

Нека је стању сложеног система $|\psi\rangle_{12} = \sum_i c_i |i\rangle_1 |i\rangle_2$ ← ШКФ

$$\langle \hat{A}_1 \rangle = tr_{12}(\hat{A}_1 \otimes \hat{I}_2 \, |\psi\rangle_{12}\langle\psi|)$$

$$= {}_{12}\langle \psi | \hat{A}_1 \otimes \hat{I}_2 | \psi \rangle_{12}$$

$$= \sum_{i,j} c_i^* c_j^* \, {}_1\langle i | \hat{A}_1 | j \rangle_1 \; {}_2\langle i | j \rangle_2$$

$$= \sum_i |c_i|^2 \, {}_1\langle i | \hat{A}_1 | i \rangle_1$$

$$= \sum_i |c_i|^2 \, tr_1(\hat{A}_1 |i\rangle_1 \langle i|)$$

$$= tr_1\Big(\underbrace{\sum_i |c_i|^2 |i\rangle_1 \langle i|}_{\hat{\rho}_1} \hat{A}_1\Big) = tr_1 \hat{\rho}_1 \hat{A}_1$$

$\boxed{\text{Аналогно за други подсистем (вежба)}}$

15. Показати да је парцијални траг базис инваријантан, али да у општем случају не важи

$$tr_A(\hat{X}\hat{Y}) = tr_A(\hat{Y}\hat{X})$$

при чему $\hat{X} \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ и $\hat{Y} \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$.

а)

$$tr_A \hat{X} = \sum_i {}_A\langle i|\hat{X}|i\rangle_A = \left[\hat{X} = \sum_p \alpha_p \hat{P}_A^p \otimes \hat{P}_B^p\right] =$$

$$= \sum_i {}_A\langle i|\sum_p \alpha_p \hat{P}_A^p \otimes \hat{P}_B^p|i\rangle_A =$$

$$= \sum_i \sum_p \alpha_p \, {}_A\langle i|\hat{P}_A^p|i\rangle_A \hat{P}_B^p = \sum_m \sum_p \alpha_p \, {}_A\langle m|\hat{P}_A^p|m\rangle_A \hat{P}_B^p$$

$$= \sum_m {}_A\langle m|\sum_p \alpha_p \hat{P}_A \otimes \hat{P}_B|m\rangle_A = tr_A \hat{X}$$

б)

$$\hat{X} = \sum_p \alpha_p \hat{P}_A^p \otimes \hat{P}_B^p, \quad \hat{Y} = \sum_s \beta_s \hat{\Pi}_A^s \otimes \hat{\Pi}_B^s$$

$$tr_A \hat{X}\hat{Y} = \sum_i {}_A\langle i|\sum_{p,s} \alpha_p\beta_s \hat{P}_A^p\hat{\Pi}_A^s \otimes \hat{P}_B^p\hat{\Pi}_B^s|i\rangle_A$$

$$= \sum_{p,s} \alpha_p\beta_s \underbrace{\sum_i {}_A\langle i|\hat{P}_A^p\hat{\Pi}_A^s|i\rangle_A}_{N} \hat{P}_B^p\hat{\Pi}_B^s$$

$$= N \sum_{p,s} \alpha_p\beta_s \hat{P}_B^p\hat{\Pi}_B^s$$

$$tr_A \hat{Y}\hat{X} = N \sum_{p,s} \alpha_p\beta_s \hat{\Pi}_B^s\hat{P}_B^p$$

$\hat{P}_B^p\hat{\Pi}_B^s \neq \hat{\Pi}_B^s\hat{P}_B^p$ у општем случају $\Rightarrow tr_A(\hat{X}\hat{Y}) \neq tr_A(\hat{Y}\hat{X})$